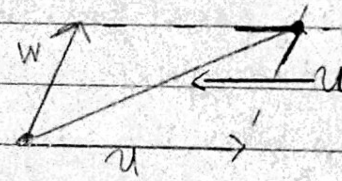
24/11/15

F σώμα, V πρόσθεση $V\times V \to V$
βαθμωτός πολ. $F\times V\to V$

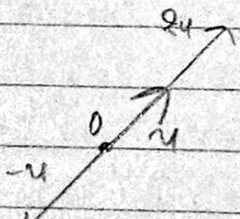
$W \leq V$ διανυσματικός υπόχωρος

Παραδείγματα διανυσματικών χώρων

1. $F^{\nu\times\mu}$ + πρόσθεση πινάκων
   • βαθμωτός πολλαπλασιασμός $F\times F^{\nu\times\mu} \to F^{\nu\times\mu}$ ①
2. $F^{\nu} = \underbrace{F\times \cdots \times F}_{\nu \text{ φορές}}$ Πράξεις $+ : F^{\nu}\cdot F^{\nu} \to F^{\nu}$ ①
   κατά συντεταγμένες $\cdot\, F\times F^{\nu}\to F^{\nu}$ ②
   $(\alpha_1 \ldots \alpha_\nu) + (b_1 \ldots b_\nu) = (\alpha_1+b_1, \alpha_2+b_2 \ldots \alpha_\nu+b_\nu)$ ①
   $\lambda(\alpha_1 \ldots \alpha_\nu) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2 \ldots \lambda\alpha_\nu)$ ②
3. Έστω Δ^2 το σύνολο των διανυσμάτων του επιπέδου που έχουν αρχή το 0.
   - Πρόσθεση : $\Delta^2\times\Delta^2 \to \Delta^2$



   - Πολλαπλασιασμός : $R\times\Delta^2\to\Delta^2$



Με αυτές τις πράξεις Δ^2 δ.χ. επί του R

4. Το σύνολο V των ακολουθιών $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ με $\alpha_n \in R$ για κάθε n είναι διανυσματικός χώρος επί του R με πράξεις $(\alpha_n)_{n\geq1} + (b_n)_{n\geq1} = (\alpha_n+b_n)_{n\geq1}$, $\lambda\cdot(\alpha_n)_{n\geq1} = (\lambda\alpha_n)_{n\geq1}$ για όλα $\lambda\in R$.

Μηδενικό στοιχείο του V η ακολουθία $(\alpha_n)_{n\geq1}$ με $\alpha_n = 0_R$ για κάθε $n\geq1$

ΕΡΩΤΗΜΑ: Έστω $\{W_1 = (a_n)_{n\geq 1}$ με a_n συγκλίνουσα

Είναι το W_1 υπόχωρος του V;

Ναι γιατί 1) η μηδενική ακολουθία, σαν σταθερά, είναι συγκλίνουσα, άρα στο W_1.

2) Αν $a_n \to a$, $b_n \to b \Rightarrow a_n + b_n \to a + b$.

Άρα το άθροισμα δύο στοιχείων του W_1 είναι στο W_1.

3) Αν $a_n \to a_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, από απειροστικό $\lambda a_n \to \lambda a$.

Άρα a_n συγκλίνουσα, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\lambda \cdot a_n$ συγκλίνουσα

Άρα W_1 διανυσματικός υπόχωρος του V. Επομένως τον περιορισμό των πράξεων W_1 δ.χ. επί του $\mathbb{R}$.

- Έστω $W_2 = \{(a_n)_{n\geq 1} \in W_1$ με $a_n \to 0\}$. Είναι το W_2 υπόχωρος του W_1;

Είναι, γιατί

1) η μηδενική ακολουθία έχει όριο το 0, άρα είναι το W_2.

2) Αν $a_n \to 0$, $b_n \to 0 \Rightarrow a_n + b_n \to 0$. Άρα $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ στο $W_2 \Rightarrow (a_n + b_n)_{n\geq 1} \in W_2$

3) Αν $a_n \to 0$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot a_n \to 0$. Άρα $(a_n)_{n\geq 1}$ στο W_2 και $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda (a_n)_{n\geq 1} \in W_2$. Άρα W_2 υπόχωρος του W_1

- Έστω $W_3 = \{(a_n)_{n\geq 1} \in W_1$ με $\lim\limits_{n\to +\infty} a_n \geq 0\}$. Είναι ο W_3 υπόχωρος του W_1;

Όχι!!! Τα 1 και 2 ικανοποιούνται, όχι όμως το 3 γιατί π.χ. για $\lambda = -1$ και την ακολουθία $(a_n)_{n\geq 1}$ με $a_n = 1$ για κάθε n έχουμε $(a_n) \in W_3$, αλλά $(\lambda a_n) \notin W_3$ γιατί $\lim\limits_{n\to +\infty} (\lambda a_n) = \lambda \cdot \lim\limits_{n\to +\infty} a_n = (-1)\cdot 1 = -1 < 0$

Έστω $V=\{f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f \text{ συνάρτηση}\}$

- Ορίζουμε $+: V\times V\to V$ ως εξής: Αν $f,g\in V$ τότε $f+g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- Ορίζουμε $\cdot: \mathbb{R}\times V\to V$ ως εξής: Για $\lambda\in\mathbb{R}$, $f\in V$ τότε $\lambda\cdot f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με $(\lambda f)(x)=\lambda\cdot f(x)$

Εύκολα βλέπουμε (άσκηση) ότι με αυτές τις πράξεις το V είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$, με ουδέτερο στοιχείο την σταθερή συνάρτηση με τιμή $0_{\mathbb{R}}$

Έστω $W_1=\{f\in V\ f \text{ συνεχής συνάρτηση}\}$. Τότε το W_1 είναι υπόχωρος του V, γιατί:

α) η σταθερή συνάρτηση με τιμή 0 είναι συνεχής

β) το άθροισμα δύο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής

γ) Αν $\lambda\in\mathbb{R}$ και f συνεχής $\Rightarrow$ λf είναι συνεχής

Ομοίως αν θέσουμε $W_2=\{f\in V: f \text{ παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R}\}$ το W_2 είναι υπόχωρος του W_1 (άρα και του V)

Έστω $V=F^{\nu\times\nu}$. Θέτουμε $W_1=\{A\in F^{\nu\times\nu}: A \text{ διαγώνιος πίνακας}\}$
$W_2=\{A\in F^{\nu\times\nu}: A \text{ άνω τριγωνικός}\}$
$W_3=\{A\in F^{\nu\times\nu}: A \text{ κάτω τριγωνικός}\}$

Δείξτε (σαν άσκηση) ότι για κάθε $i\in\{1,2,3\}$ ο W_i είναι υπόχωρος του V;

Παραδείγματα - Υπενθύμιση

Τα στοιχεία του $\mathbb{R}[x]$ είναι εκφράσεις της μορφής $\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\dots+\alpha_nx^n$ με $\alpha_i\in\mathbb{R}$ και $n\geq 0$. Το μηδενικό πολυώνυμο είναι αυτό με $\alpha_0=\alpha_1=\dots=\alpha_n=0_{\mathbb{R}}$

Αν $f(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\dots+\alpha_nx^n$ είναι ένα μη μηδενικό πολυώνυμο ορίζουμε βαθμό του $f(x)$ το μέγιστο δείκτη i ώστε $\alpha_i\neq 0$ (Για μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζουμε βαθμό) π.χ. βαθμός $(3+5x+6x^2+0\cdot x^3)=2$

- Ορίζουμε πρόσθεση $+ : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}(x) \to \mathbb{R}(x)$ ως εξής:

Αν $f(x)=\alpha_0+\ldots+\alpha_n x^n$

$g(x)=b_0+\ldots+b_m x^m$

το $f(x)+g(x)=(\alpha_0+b_0)+(\alpha_1+b_1)x+(\alpha_2+b_2)x^2+\ldots$ (όπου αν $n\leq m$ προσθέτουμε στο $f(x)$ όρους $0x^{n+1}+\ldots+0x^m$

π.χ. $(1+x^2)+(x^2+x^5)=1+2x^2+x^5$

- Ορίζουμε $\mathbb{R}\times\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}(x)$ ως εξής:

Αν $\lambda\in\mathbb{R}$ $\lambda(\alpha_0+\alpha_1x+\ldots+\alpha_nx^n)=\lambda\alpha_0+(\lambda\alpha_1)x+(\lambda\alpha_2)x+(\lambda\alpha_2)x^2$ $+\ldots+\lambda(\alpha_n)x^n$

Με αυτές τις πράξεις το $\mathbb{R}(x)$ γίνεται διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$

Ορίζουμε $\mathbb{R}(x)_{\leq n}=\{$μηδενικό πολυώνυμο$\}\cup\{$πολυώνυμα βαθμού $\leq n\}=$

$\{\alpha_0+\alpha_1x+\ldots+\alpha_nx^n,\ \alpha_i\in\mathbb{R}\}$

Τότε $[x]_{\leq n}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}(x)$

Πράγματι, για $\alpha_0=\ldots=\alpha_n=0$ έχουμε ότι το μηδενικό πολυώνυμο (που είναι το μηδενικό του $\mathbb{R}[x]$) είναι στο $\mathbb{R}(x)_{\leq n}$. Επίσης φανερά αν $f(x), g(x)\in\mathbb{R}(x)_{\leq n}$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε $f(x)+g(x)\in\mathbb{R}(x)_{\leq n}$

και $\lambda f(x)\in\mathbb{R}(x)_{\leq n}$

Άρα $\mathbb{R}(x)_{\leq n}$ υπόχωρος του $\mathbb{R}(x)$.

Παράδειγμα: Έστω $A \in F^{\nu\times\mu}$ και Σ το ομογενές σύστημα
$A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$.

Θέτουμε $S \subseteq F^{\mu\times 1}$ το σύνολο λύσεων του (Σ), δηλαδή
$S = \left\{ \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_\mu\end{pmatrix} \in F^{\mu\times 1} : A\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_\mu\end{pmatrix} = 0_{\nu\times 1} \right\}$

Ισχυρισμός: Το S είναι υπόχωρος του $F^{\mu\times 1}$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού ✓✓✓

1) Το $0_{F^{\mu\times 1}} = 0_{\mu\times 1} \in S$, γιατί $\underset{\nu\times\mu}{A}\underset{\mu\times 1}{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}} = 0_{\nu\times 1}$

2) Έστω $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_\mu\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi_1'\\ \vdots\\ \xi_\mu'\end{pmatrix} \in S \Rightarrow \begin{cases} A\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_\mu\end{pmatrix} = 0_{\nu\times 1} \\ A\begin{pmatrix}\xi_1'\\ \vdots\\ \xi_\mu'\end{pmatrix} = 0_{\nu\times 1} \end{cases}$

Προσθέτοντας $A\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_\mu\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}\xi_1'\\ \vdots\\ \xi_\mu'\end{pmatrix} = 0_{\nu\times 1} + 0_{\nu\times 1} \Rightarrow$

$$A\left(\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_\mu\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\xi_1'\\ \vdots\\ \xi_\mu'\end{pmatrix}\right) = 0_{\nu\times 1} \Rightarrow$$

$$A\begin{pmatrix}\xi_1+\xi_1'\\ \vdots\\ \xi_\mu+\xi_\mu'\end{pmatrix} = 0_{\nu\times 1} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_\mu\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\xi_1'\\ \vdots\\ \xi_\mu'\end{pmatrix} \in S$$

Έστω τώρα $\lambda \in F$ και $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_\mu\end{pmatrix} \in S$. Θα δ.ο. $\lambda\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_\mu\end{pmatrix} \in S$

Πράγματι από ιδιότητες πινάκων

$A\left(\lambda\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_\mu\end{pmatrix}\right) = \lambda\left(A\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_\mu\end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot 0_{\nu\times 1} = 0_{\nu\times 1}$

Άρα δείξαμε S υπόχωρος

Πρόταση: Έστω V διανυσματικός χώρος επί του F. Τότε το σύνολο $\{0_V\}$ είναι υπόχωρος του V και λέγεται μηδενικός υπόχωρος.

Απόδειξη

1) Προφανώς $0_V \in \{0_V\}$

2) Αφού 0_V ουδέτερο ως προς την πρόσθεση, $0_V + 0_V = 0_V$ άρα $\{0_V\}$ κλειστό ως προς την πρόσθεση.

3) Έστω $\lambda \in F$. Δείξαμε $\lambda \cdot 0_V = 0_V$

Άρα από 1), 2), 3) $\{0_V\}$ υπόχωρος του V.

Πρόταση: Έστω διανυσματικός χώρος επί του F. Τότε ο V είναι υπόχωρος του V.

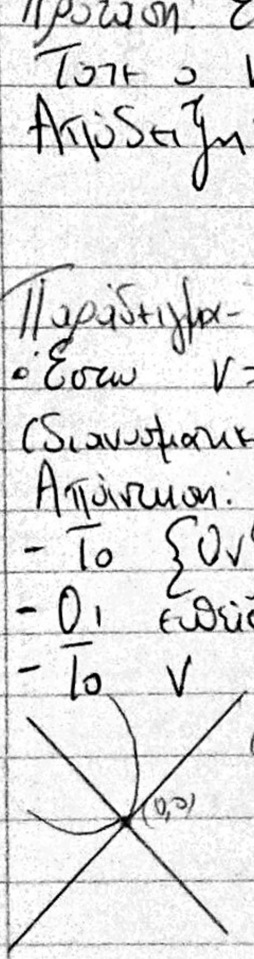
Απόδειξη: Προφανές!

Παράδειγμα-Άσκηση*:

• Έστω $V = \mathbb{R}^2$ σαν $\mathbb{R}$-δια χώρο. Ποιοι είναι οι (διανυσματικοί) υπόχωροι του V;

Απάντηση:

- Το $\{0_V\}$, δηλαδή ο μηδενικός υπόχωρος
- Οι ευθείες που περνάν από το $(0,0) = 0_V$
- Το V



(Η παραβολή δεν είναι υπόχωρος)

Πρόταση: Έστω V δ.χ. $/\mathbb{F}$ και $w \in V$. Θέτουμε $<v> = \{\lambda \cdot w : \lambda \in \mathbb{F}\}$. Τότε $<w>$ υπόχωρος του V (και μάλιστα είναι ο μικρότερος υπόχωρος του V που περιέχει το w)

Απόδειξη:

1) Από προηγούμενη πρόταση $0_F \cdot w = 0_V$. Άρα $0_V \in <w>$.

(2) Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Τότε $\lambda w + \mu w = (\lambda+\mu) \cdot w \in <w>$)

ή πιο αναλυτικά ...

Έστω $z_1, z_2 \in <w>$. Άρα υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ με $z_1 = \lambda_1 w$ και $z_2 = \lambda_2 \cdot w$. Έχουμε $z_1 + z_2 = \lambda_1 w + \lambda_2 w = (\lambda_1 + \lambda_2) w$. Άρα $z_1 + z_2 \in <w>$

3) Έστω $\mu \in \mathbb{F}$ και $z \in <w>$. Θ.δ.ο. $\mu z \in <w>$. Αφού $z \in <w>$ υπάρχει $\lambda \in \mathbb{F}$ με $z = \lambda w$. Τότε $\mu z = \mu(\lambda w) = (\mu\lambda) \cdot w \in <w>$

Αξιώματα Διαν. Χώρου

Από 1, 2, 3 $\Rightarrow$ $<w>$ είναι διαν. χώρος. Αφού από τα αξιώματα Δ.Χ. $1_F w = w \Rightarrow w \in <w>$

Μέχρι τώρα δείξαμε $<w>$ είναι υπόχωρος του V και $w \in <w>$.

Θα δείξουμε ότι $<w>$ είναι ο ελάχιστος υπόχωρος του V που περιέχει το w.

Πράγματι έστω U υπόχωρος του V με $w \in U$. Θ.δ.ο. $<w> \subseteq U$.

Πράγματι, έστω $\lambda \in \mathbb{F}$. Αφού $\left.\begin{matrix}\lambda \in \mathbb{F} \\ w \in U\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda w \in U$. Άρα $<w> \subseteq U$.

Πρόταση: Έστω V δ.χ. /F και $W_1 W_2$ υπόχωροι του V. Τότε και ο $W_1 \cap W_2$ είναι υπόχωρος του V.

Απόδειξη:

1) Αφού W_1 υπόχωρος του $V \Rightarrow 0_V \in W_1$. Ομοίως $0_V \in W_2$. Άρα $0_V \in W_1 \cap W_2$

2) Έστω $z_1, z_2 \in W_1 \cap W_2$. Άρα $z_1, z_2 \in W_1$ και $z_1, z_2 \in W_2$. Αφού W_1 υπόχωρος και $z_1, z_2 \in W_1 \Rightarrow z_1 + z_2 \in W_1$. Ομοίως αφού W_2 υπόχωρος και $z_1, z_2 \in W_2$, έπεται $\Rightarrow z_1 + z_2 \in W_2$. Άρα $z_1 + z_2 \in W_1 \cap W_2$

3) Έστω $\lambda \in F$ και $z \in W_1 \cap W_2$. Τότε $z \in W_1$ και $z \in W_2$. Αφού W_1 υπόχωρος $\lambda \in F$, $z \in W_1 \Rightarrow \lambda \cdot z \in W_1$. Ομοίως δείχνουμε $\lambda z \in W_2$. Άρα $\lambda \cdot z \in W_1 \cap W_2$.

Από τα 1,2,3 $\Rightarrow W_1 \cap W_2$ υπόχωρος.

Άσκηση: Έστω V δ.χ. επί του F και W_1, W_2 υπόχωροι του V. Δείξτε ότι $W_1 \cup W_2$ είναι υπόχωρος του V αν και μόνο αν $W_1 \subseteq W_2$ ή $W_2 \subseteq W_1$